

Sao Thủy

Sao Kim

Trái Đất

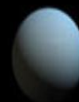
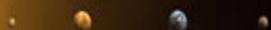
Sao Hỏa

Sao Mộc

Sao Thổ³

Sao Thiên Vương

Sao Hải Vương



HÀNH TINH

Ceres



Sao Diêm Vương

Haumea

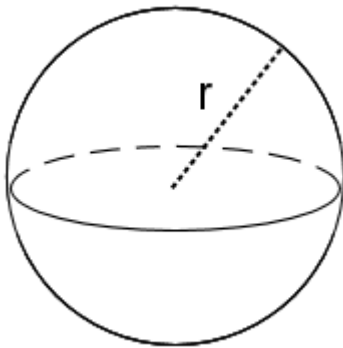
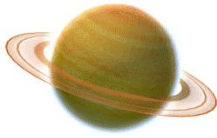
Makemake

Eris



HÀNH TINH
Lùn

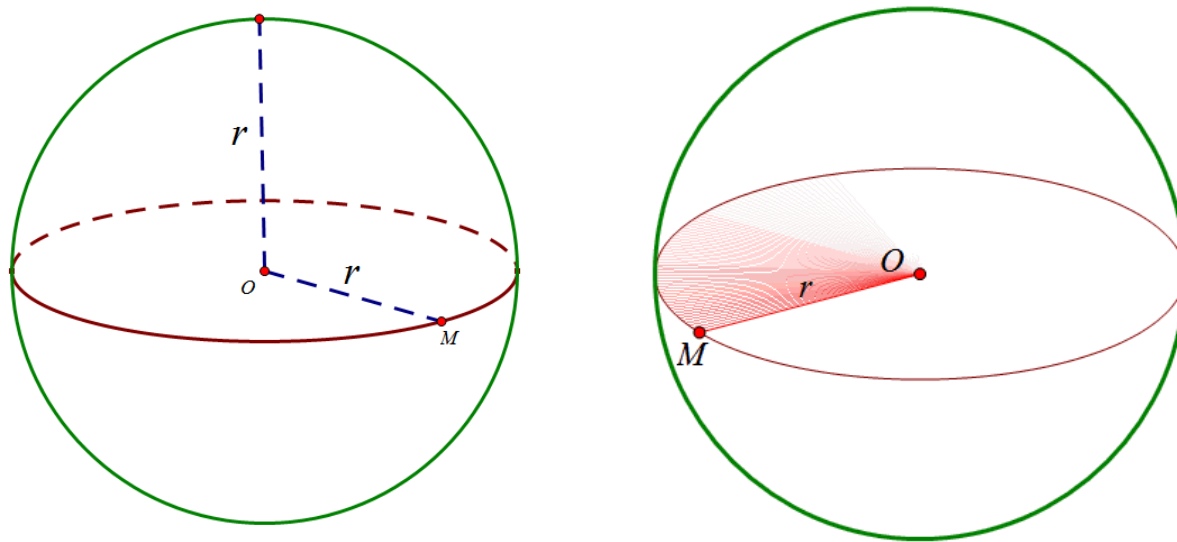
§2. MẶT CẦU



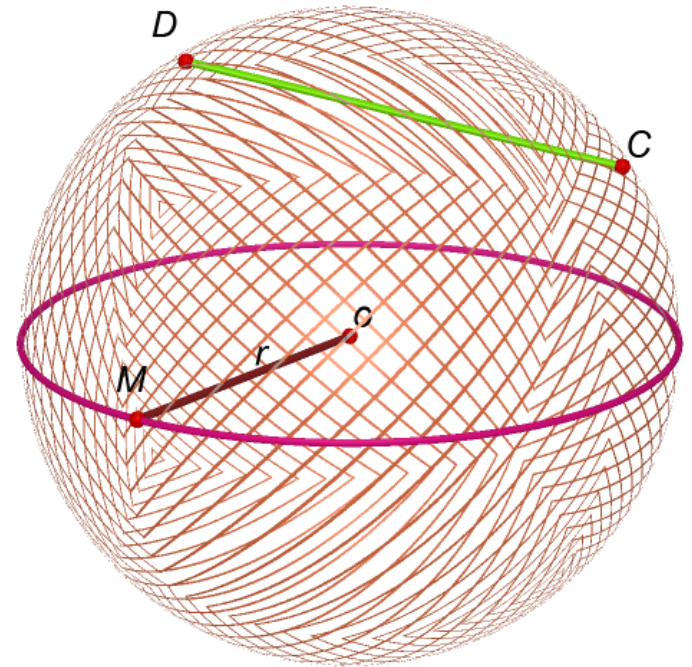
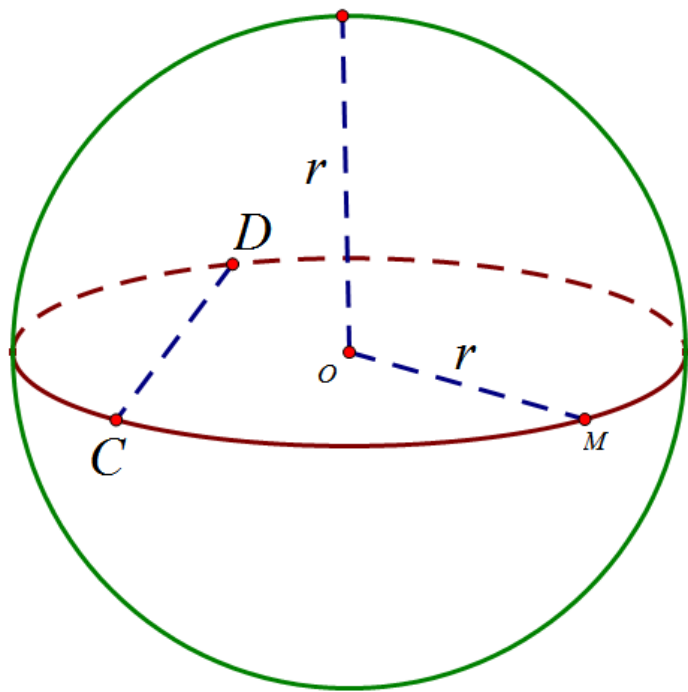
I. MẶT CẦU VÀ CÁC KHÁI NIỆM LIÊN QUAN ĐẾN MẶT CẦU

1. Mặt cầu

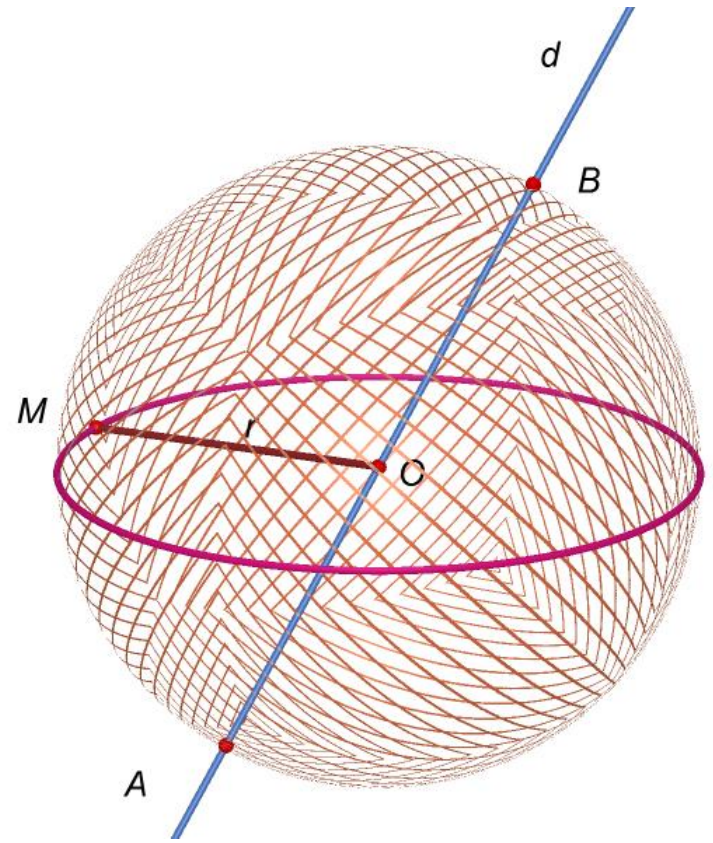
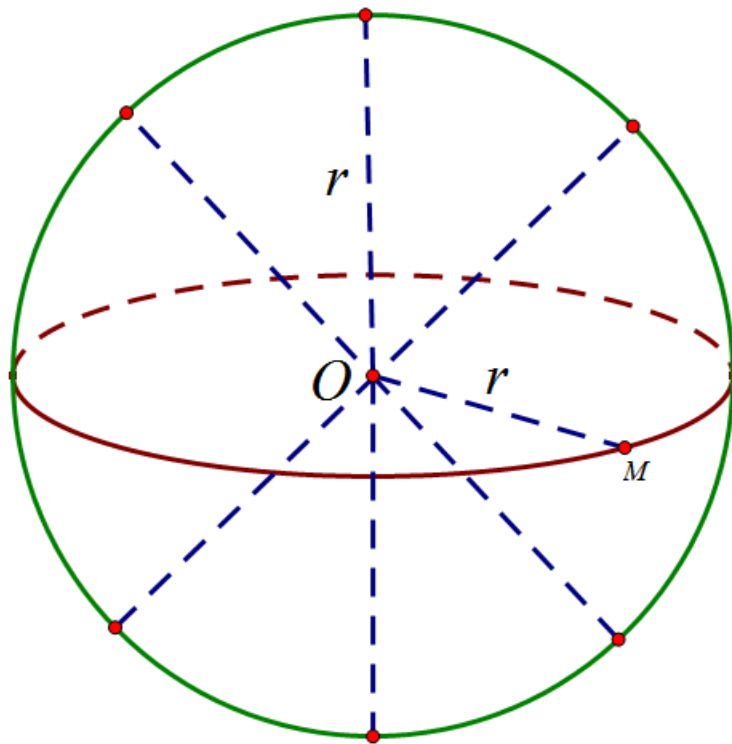
Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng không đổi bằng r ($r > 0$) được gọi là mặt cầu tâm O bán kính r .



$$\text{Kí hiệu: } S(O;r) = \{ M \mid OM = r \}$$



Nếu hai điểm C , D nằm trên mặt cầu $S(O, r)$ thì đoạn CD gọi là dây cung của mặt cầu đó.

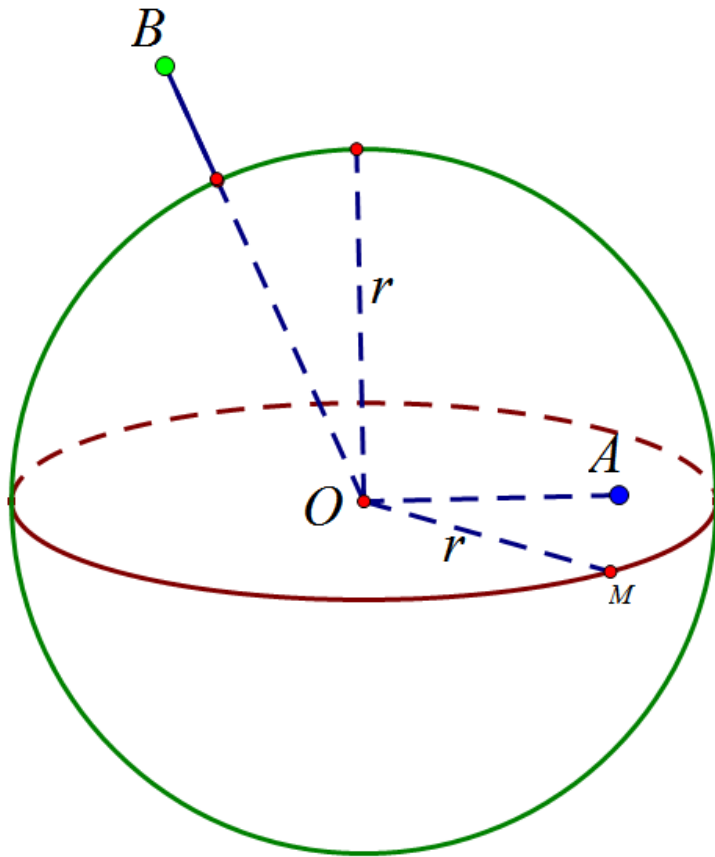


Dây cung AB đi qua tâm O được gọi là một đường kính của mặt cầu

2. Điểm trong, điểm ngoài, khối cầu



a. Điểm trong, điểm ngoài

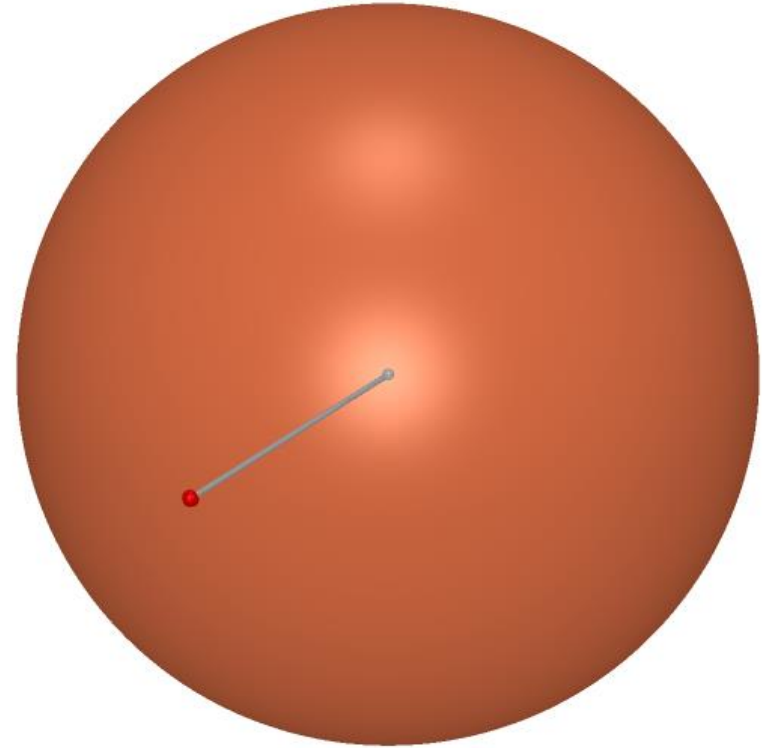


$OM = r$ nên điểm M nằm trên mặt cầu

$OA < r$ nên điểm A nằm trong mặt cầu

$OB > r$ nên điểm B nằm ngoài mặt cầu

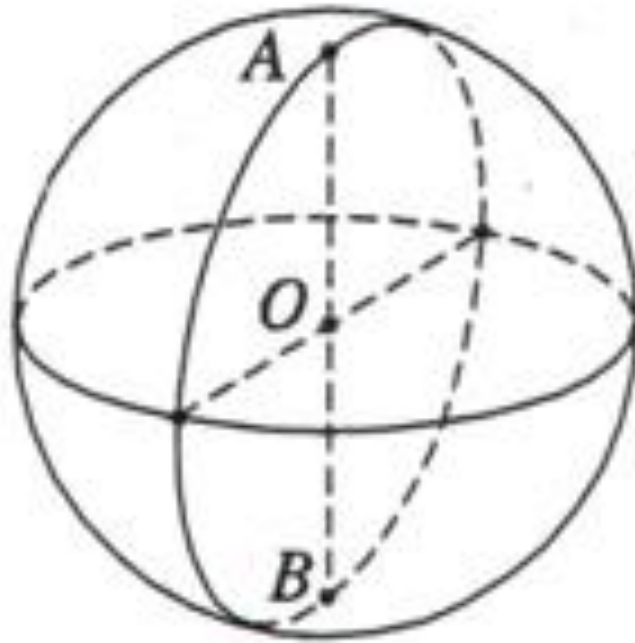
b. Khối cầu



Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O;r)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu được gọi là khối cầu hoặc hình cầu tâm O bán kính r .

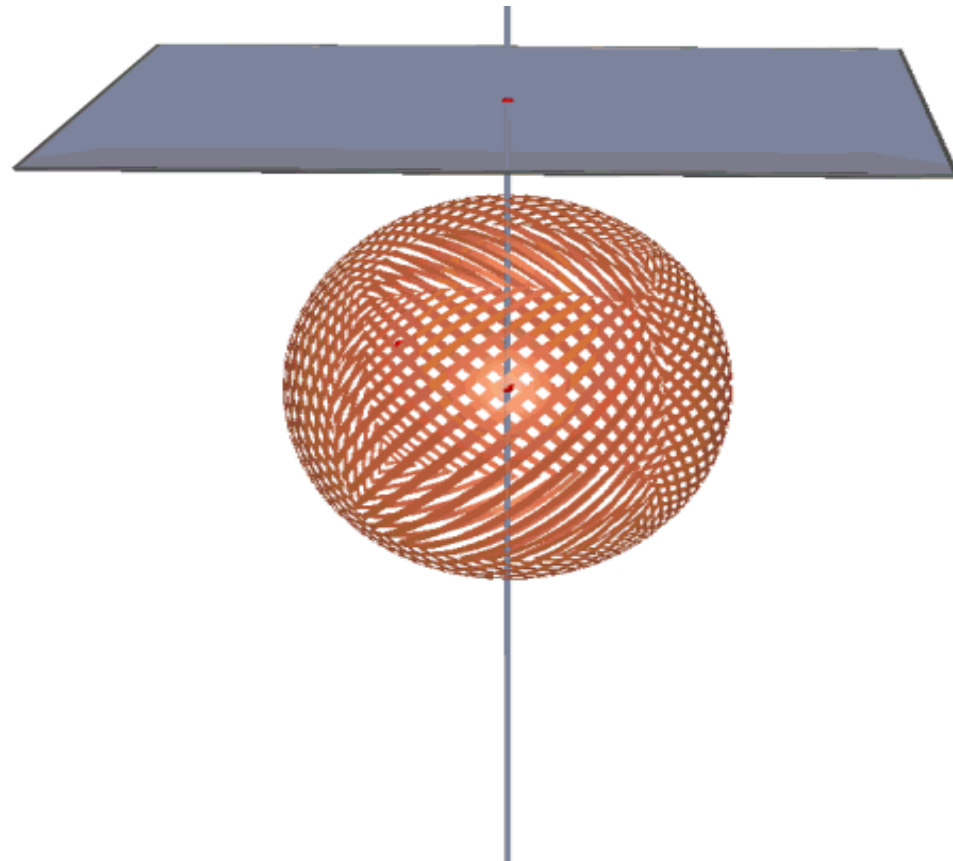
3. *Biểu diễn mặt cầu*

Dùng phép chiếu vuông góc biểu diễn mặt cầu là một đường tròn

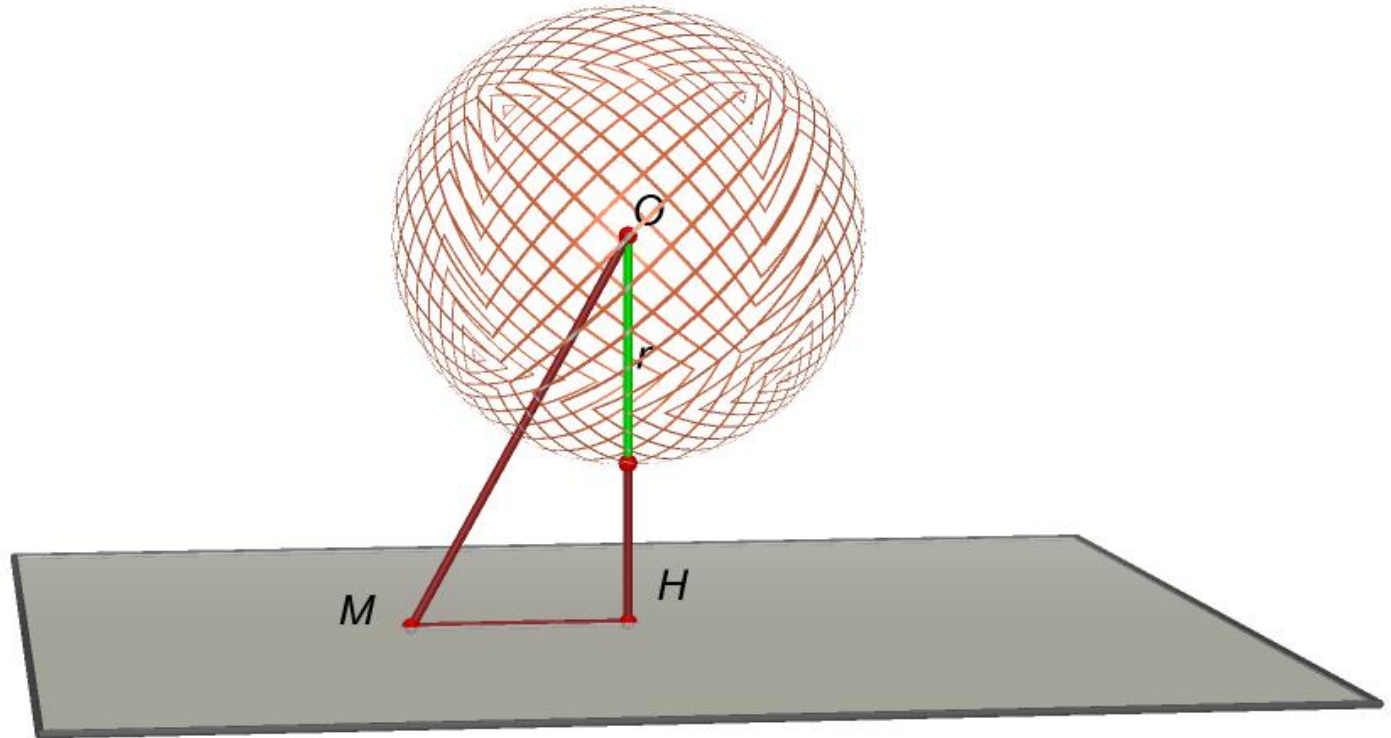


II. GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu $S(O, r)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P)
 $h = OH$ là khoảng cách từ O tới mặt phẳng (P) .

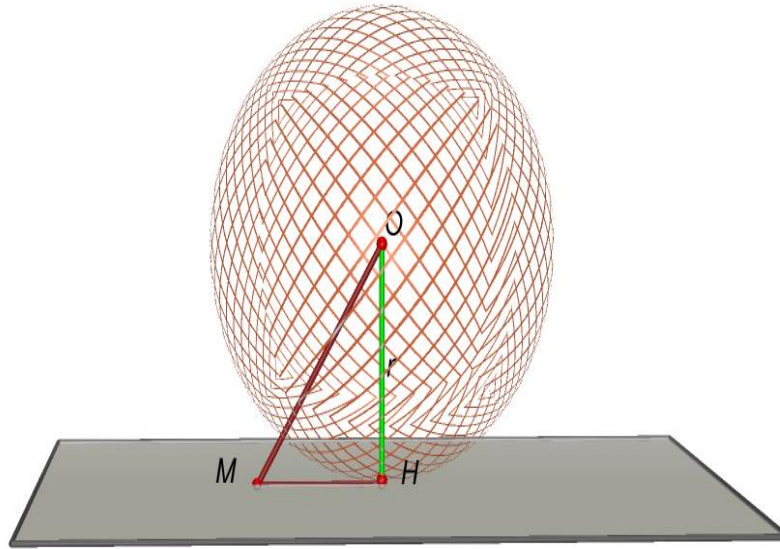


1. Trường hợp $h = OH > r$



Mặt phẳng (P) không có điểm chung với mặt cầu

2. Trường hợp $h = OH = r$



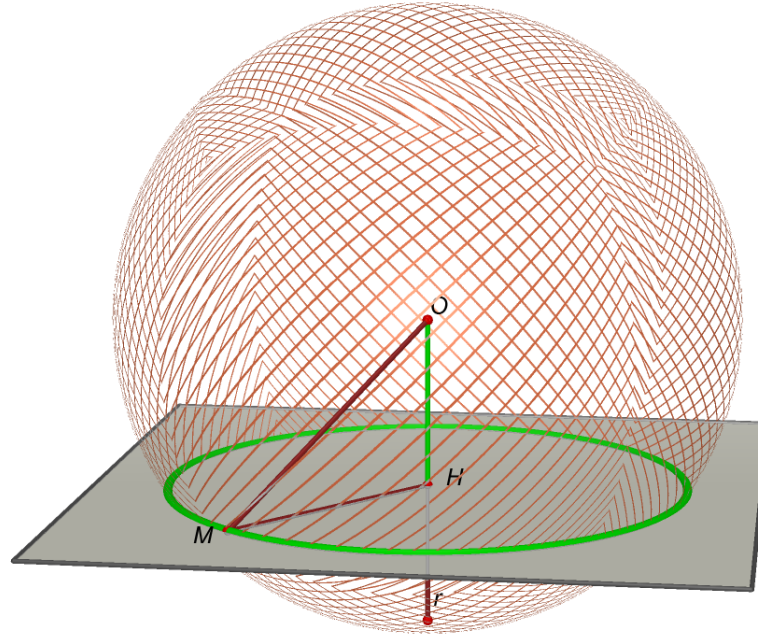
H là điểm chung duy nhất của $S(O, r)$ và mp (P)

Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu $S(O,r)$ tại H . H gọi là tiếp điểm, (P) gọi là **mặt phẳng tiếp xúc** hay **tiếp diện**

Điều kiện cần và đủ để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $S(O,r)$ tại điểm H là (P) vuông góc với bán kính OH

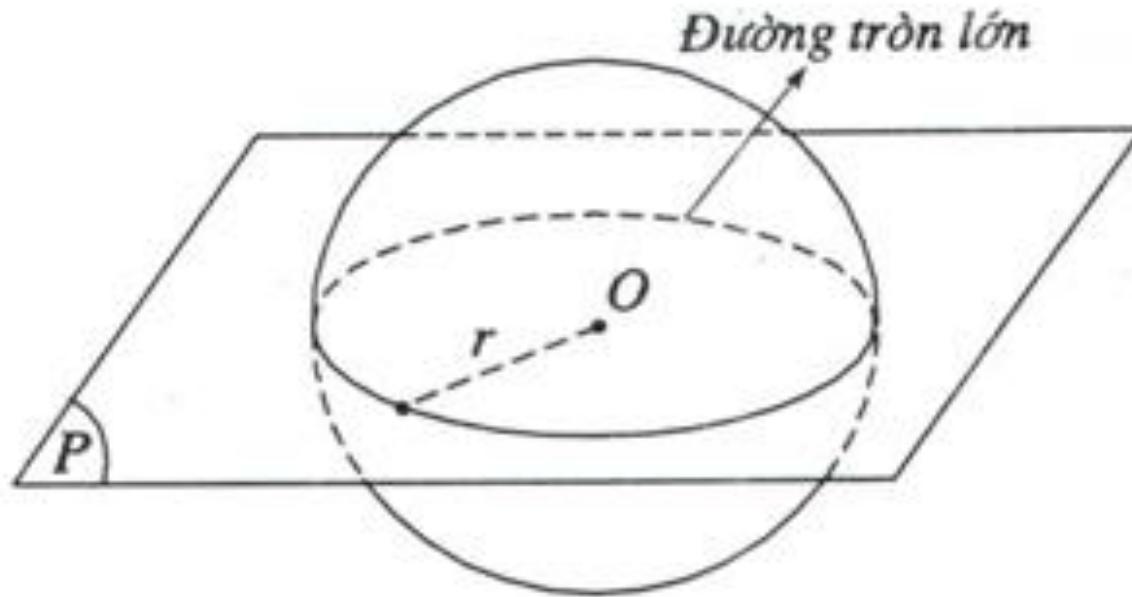
*tại điểm H đó và $d_{(O/(P))} = r$ gọi là **điều kiện tiếp xúc***

3. Trường hợp $h = OH < r$



Mặt phẳng cắt mặt cầu theo đường tròn tâm H, bán kính $r' = \sqrt{r^2 - h^2}$

* Đặc biệt : Khi $h = 0$



Mặt phẳng cắt mặt cầu theo đường tròn tâm O , bán kính r gọi là đường tròn lớn

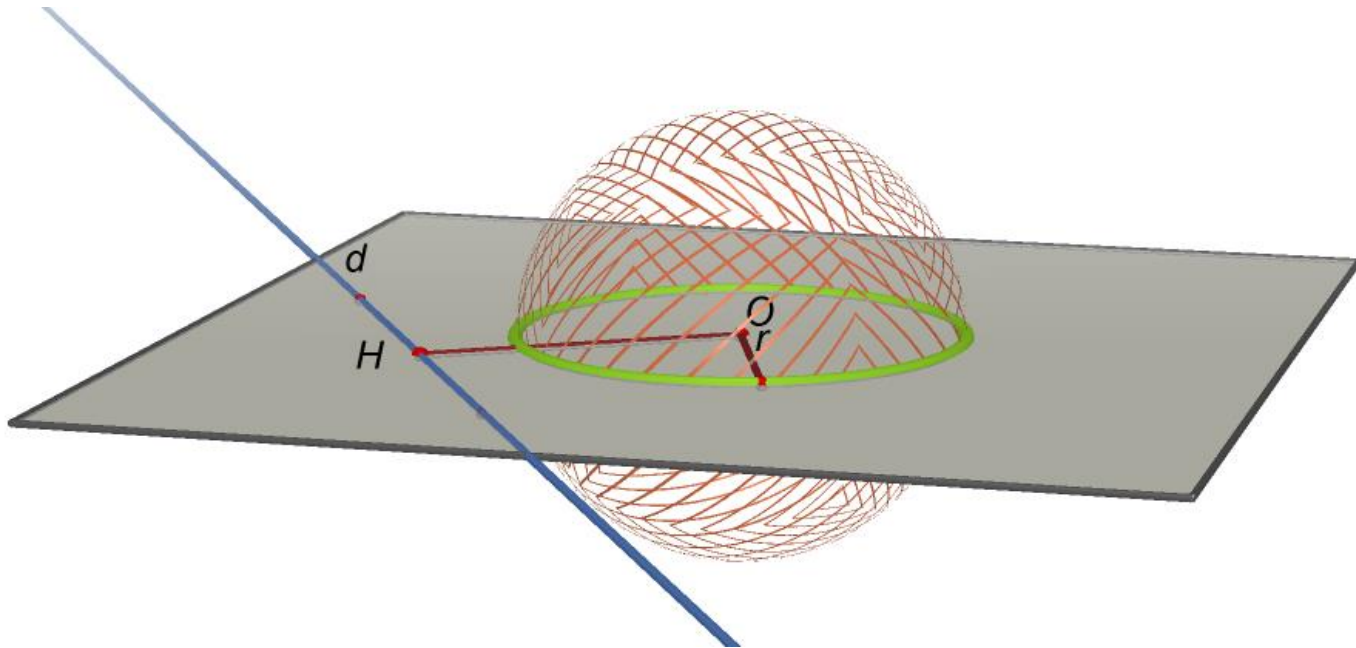
?? Hãy xác định đường tròn giao tuyến của mặt cầu $S(O,r)$ với mp (P) biết rằng khoảng cách từ tâm O đến (P) bằng $\frac{r}{2}$

Giải

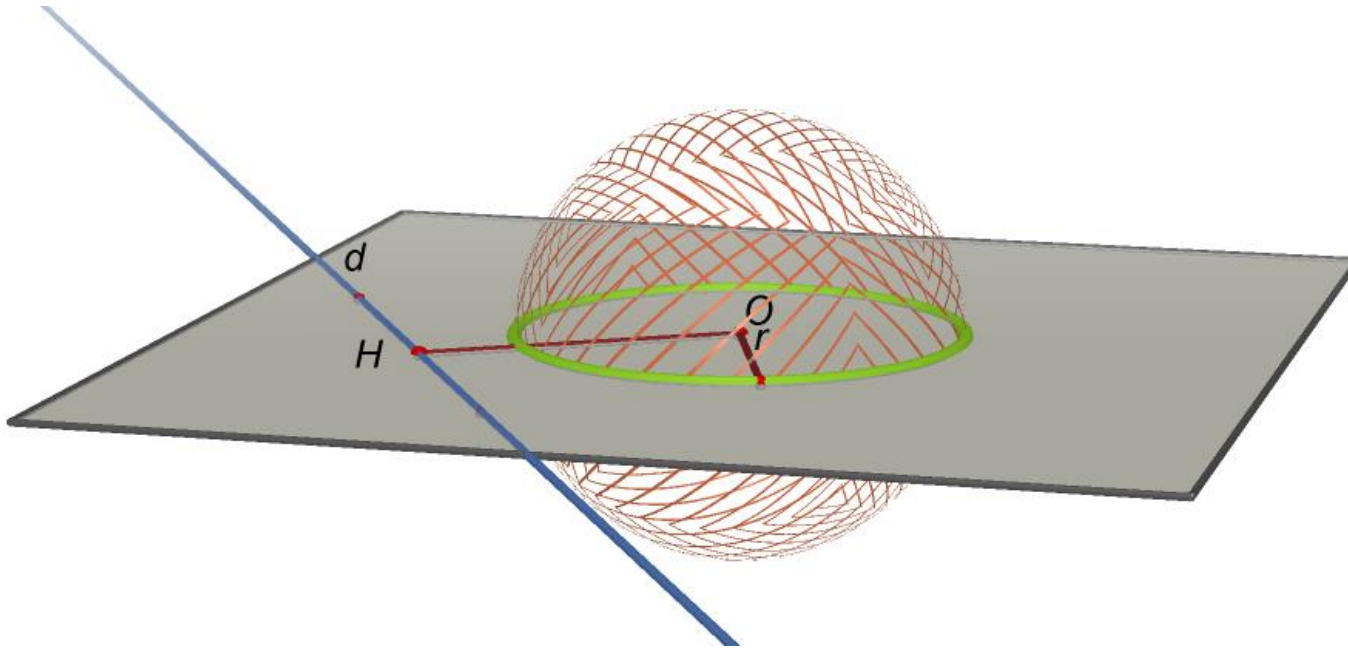
$$r' = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

III. GIAO CỦA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu $S(O,r)$ và đường thẳng d . Gọi H là hình chiếu vuông góc của tâm O trên d và OH là khoảng cách từ O tới d

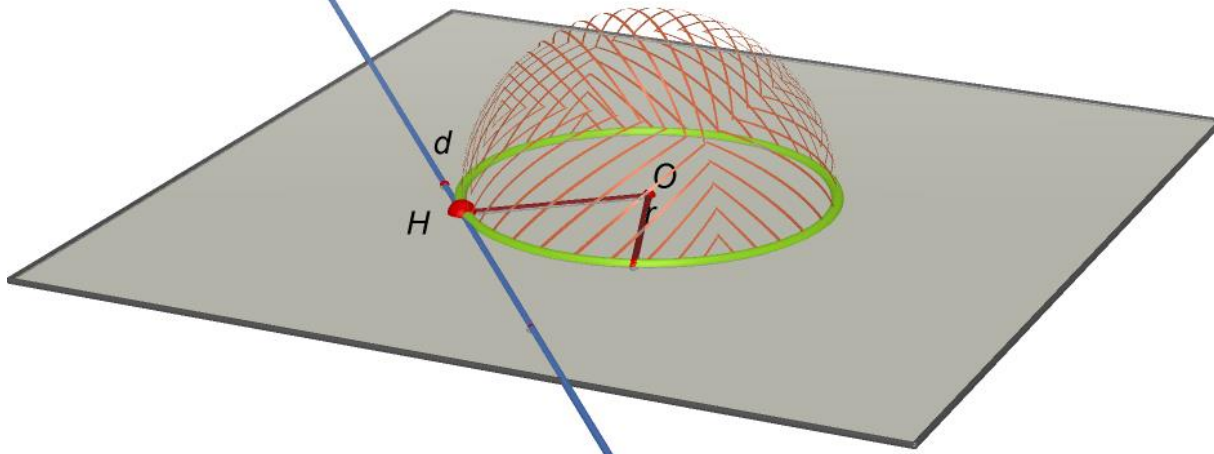


1. Trường hợp 1: $OH > r$:



d không cắt mặt cầu $S(O, r)$

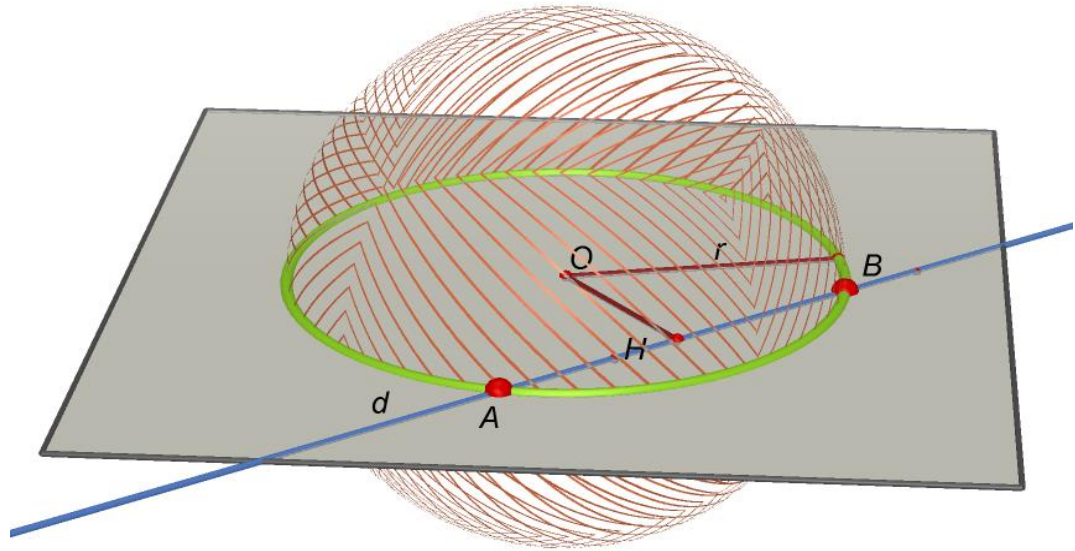
2. Trường hợp $OH = r$



d có điểm chung duy nhất H với mặt cầu $S(O, r)$. Khi đó d tiếp xúc mặt cầu $S(O, r)$ tại H . Điểm H gọi là điểm tiếp điểm, đường thẳng d gọi là tiếp tuyến của mặt cầu.

Điều kiện cần và đủ để đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu $S(O, r)$ tại điểm H là d vuông góc với bán kính OH tại điểm H đó.

3. Trường hợp $OH < r$

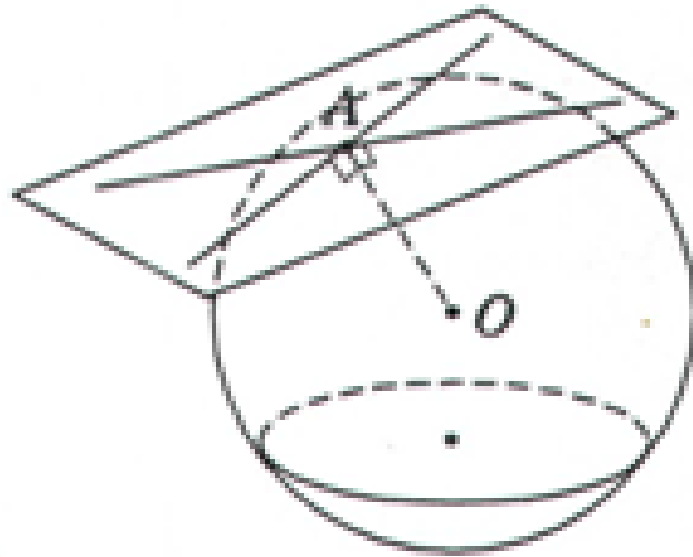


d cắt mặt cầu $S(O, r)$ tại hai điểm A, B phân biệt

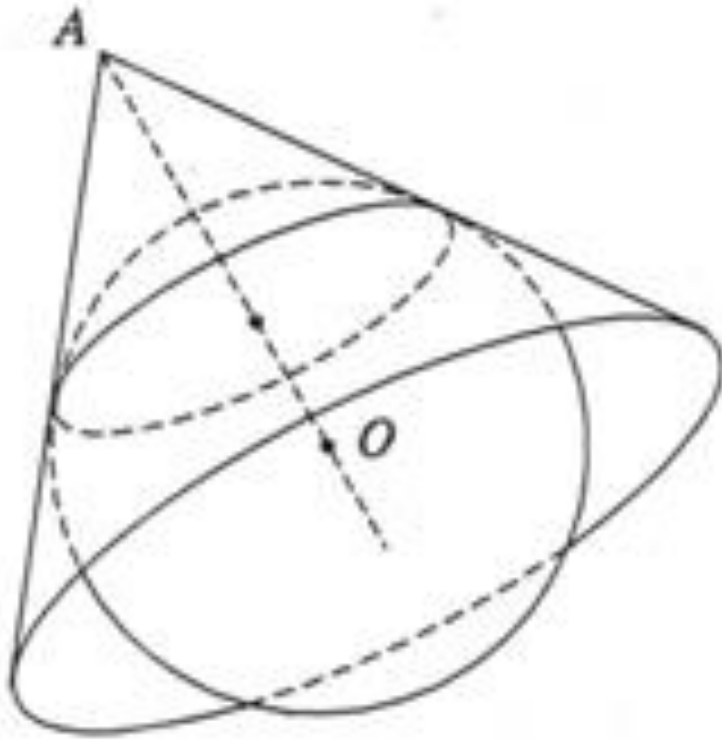
Đặc biệt, Khi $d = 0$: Δ cắt mặt cầu $S(O, r)$ tại A, B. Khi đó AB là đường kính của mặt cầu.

Nhận xét:

a). Qua điểm A nằm trên $S(O, r)$ có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó. Tất cả tiếp tuyến này đều vuông góc với bán kính OA của mặt cầu tại A và đều nằm trên mp tiếp xúc với mặt cầu tại điểm A đó.



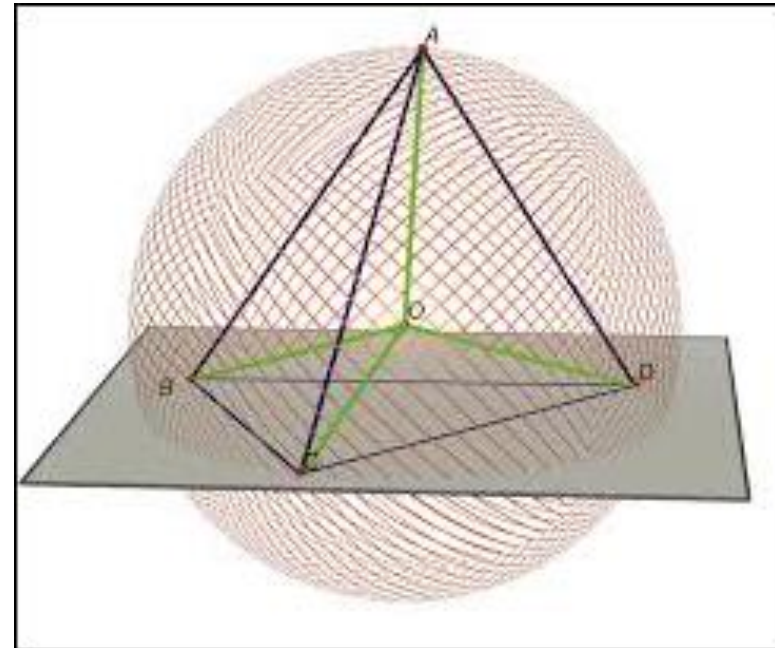
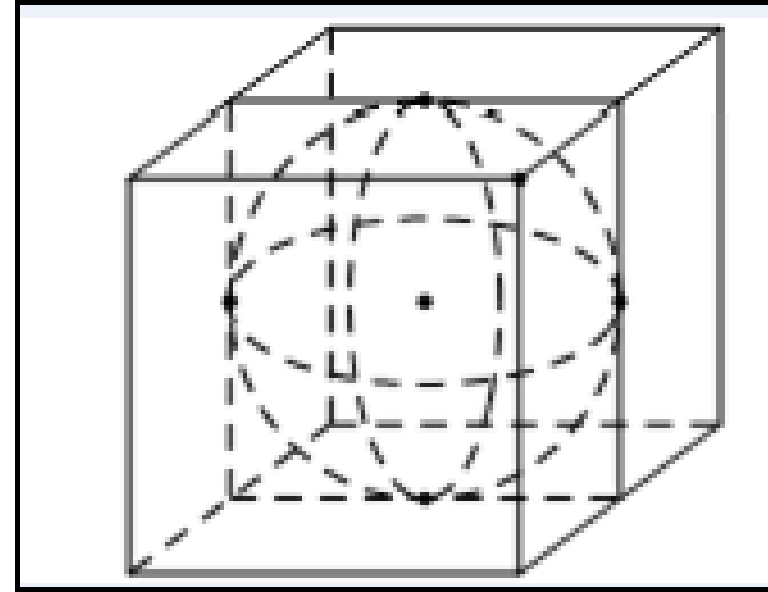
b) . Qua điểm A nằm ngoài $S(O, r)$ có vô số tiếp tuyến của mặt cầu đó . Các tiếp tuyến này tạo thành mặt nón đỉnh A . Khi đó độ dài các đoạn thẳng kẻ từ A đến các tiếp điểm đều bằng nhau



**Khái niệm mặt cầu nội tiếp ngoại tiếp hình đa diện*

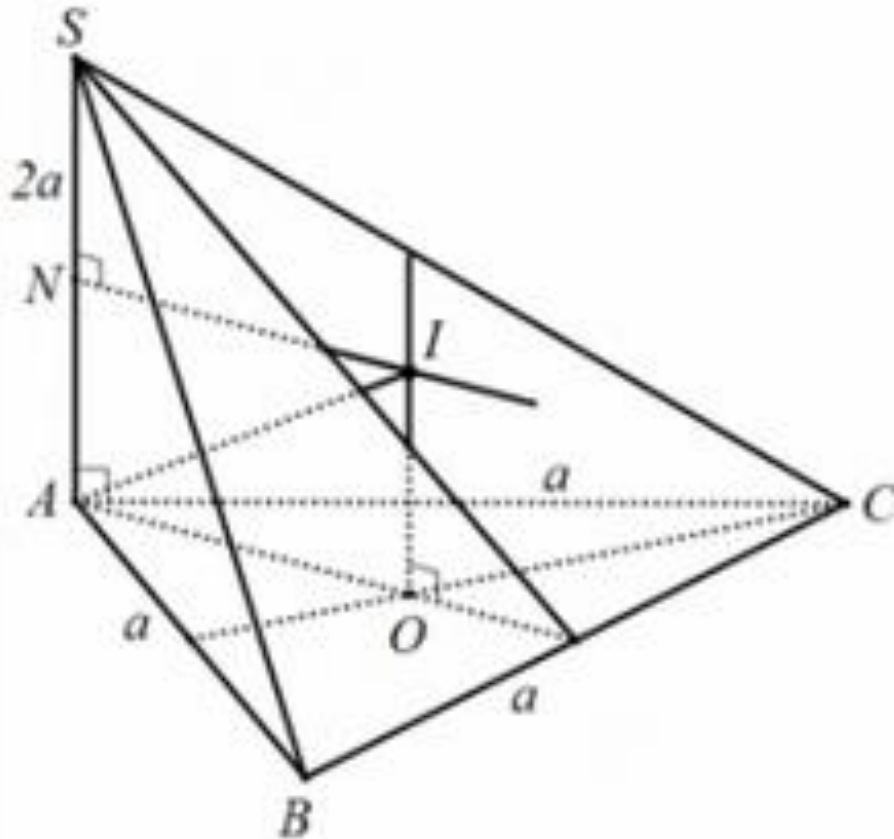
- Mặt cầu nội tiếp hình đa diện nếu mặt cầu đó tiếp xúc với các mặt của hình đa diện

- Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện nếu tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu.



Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác đều cạnh bằng a , $SA=2a$.
Tìm bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bài giải



Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC . Suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC .

Dựng trục d của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; trong mặt phẳng (SA,d) vẽ trung trực cạnh SA và cắt d tại I.

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và bán kính $R=IA=IB=IC=IS$.

Ta có tứ giác NIOA là hình chữ nhật.

Xét tam giác NAI vuông tại N có:

$$\begin{aligned} R = IA &= \sqrt{NI^2 + NA^2} = \sqrt{AO^2 + \frac{SO^2}{2}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{2}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

* Phương pháp xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

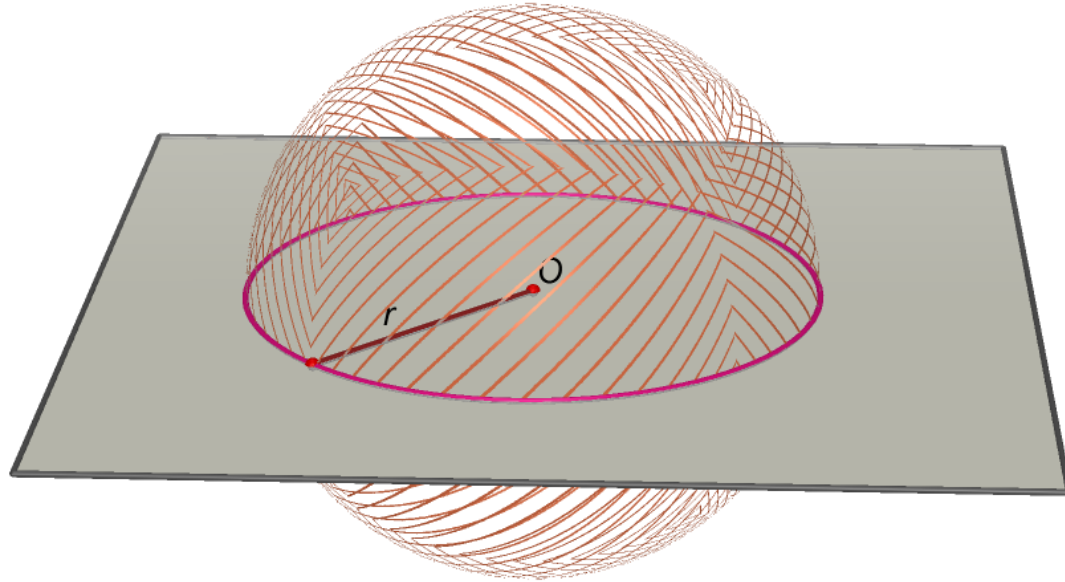
1. Xác định tâm

- + Xác định trục d của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy
- + Xác định mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên (hoặc trục Δ của đường tròn ngoại tiếp một đa giác của mặt bên)
- + Giao điểm I của (P) và d (hoặc của Δ và d) là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

2. Tính bán kính

- + Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là độ dài đoạn thẳng nối tâm I và một đỉnh của hình chóp
- + Để tính bán kính ta thường dùng định lý Pytago, tỉ số lượng giác trong tam giác vuông, hệ thức lượng trong tam giác vuông, hai tam giác đồng dạng,

IV. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH CỦA MẶT CẦU VÀ THỂ TÍCH KHỐI CẦU



$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Trắc nghiệm

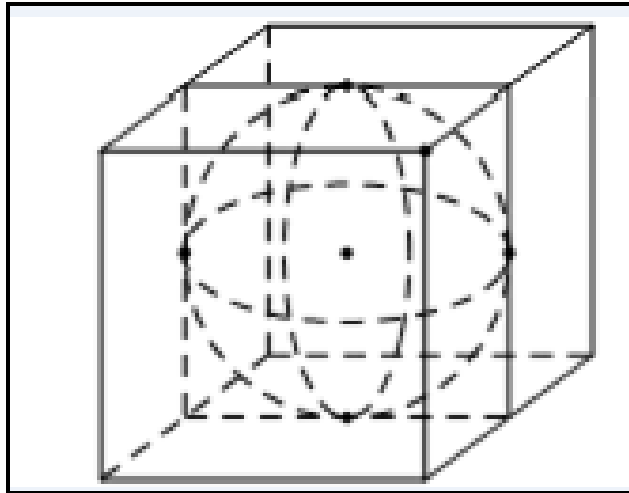
Câu 1: Số các mặt cầu đi qua 3 điểm không thẳng hàng là

- A. 0 B. 1 C. 3 **D. Vô số**

Câu 2: Bán kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương cạnh a bằng

Bài giải

- A. a
B. $2a$
C. $\frac{a}{2}$
D. $a\sqrt{2}$



Đường kính bằng a

$$\text{Bán kính } R = \frac{a}{2}$$

Câu 3: Từ 1 điểm ở ngoài mặt cầu có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến của mặt cầu đó

A. 1

B. 2

C. Vô số

D. 0

Câu 4: Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương có cạnh bằng a

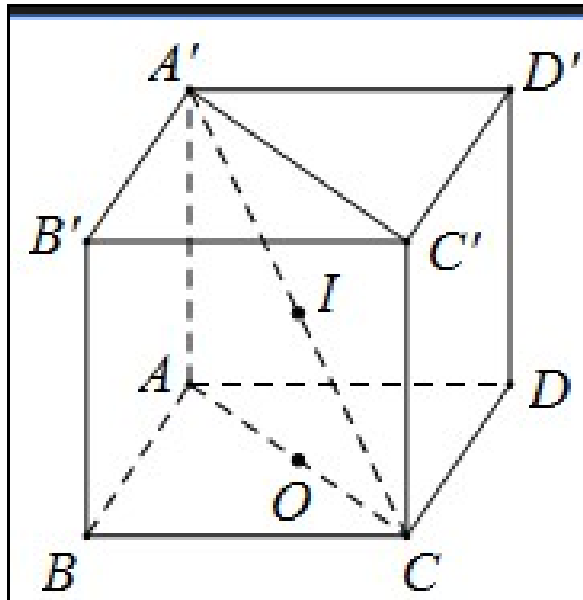
Bài giải

A. a

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a}{2}$

D. $a\sqrt{2}$



$$AC = a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A'C = a\sqrt{3}$$

$$\text{Bán kính } R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 5: Diện tích mặt cầu bán kính bằng 2m là

A. $4\pi(m^2)$ B. $8\pi(m^2)$

C. $2\pi(m^2)$ **D. $16\pi(m^2)$**

Bài giải

$$S = 4\pi R^2$$

$$S = 4\pi 2^2 = 16\pi(m^2)$$

Câu 6: Diện tích của mặt cầu có đường kính 3m là

A. $9\pi(m^2)$

B. $36\pi(m^2)$

C. $3\pi(m^2)$

D. $12\pi(m^2)$

Bài giải

$$R = \frac{3}{2}$$

$$S = 4\pi R^2 = 9\pi(m^2)$$

Câu 7: Thể tích khối cầu bán kính bằng 3m là

A. $36\pi(m^3)$

B. $72\pi(m^3)$

C. $9\pi(m^3)$

D. $18\pi(m^3)$

Bài giải

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi.3^3 = 36\pi(m^3)$$

Câu 8: Nếu tăng bán kính một khối cầu lên 5 lần thì thể tích của khối cầu sẽ

A. Tăng lên 10 lần

B. Tăng lên 5 lần

C. Tăng lên 25 lần

D. Tăng lên 125 lần

Bài giải

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$R_2 = 5R_1$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 125 R_1^3 = 125 V_1$$

Tổng kết

- Định nghĩa mặt cầu
- Giao của mặt cầu với mặt phẳng và đường thẳng
- Hình biểu diễn mặt cầu
- Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp; nội tiếp đa diện
- Diện tích mặt cầu
- Thể tích khối cầu

Chuẩn bị các bài tập 2,5,7,10 trang 49